Chapitre 4

Interpolation et approximation polynômiale

4.1 Introduction

Tout au long des deux chapitres précédents, nous nous sommes interessé principalement au problème de l'approximation d'un nombre (zéro d'un polynôme ou le zéro d'une fonction non linéaire). Nous abordons dans ce chapitre un nouveau type de problème faisant intervenir la notion d'approximation d'une fonction.
La méthode usuelle d'approximation des fonctions est la méthode d'approximation polynômiale. Parmis les divers types d'approximations polynômiales utilisées, la plus flexible et la plus facile à construire est l'approximation par interpolation polynômiale.

4.1.1 Objectif de l'interpolation

Etant donnée une fonction $f(x) = e^x$ (ou autre expression de f beaucoup plus compliquée) que nous désirons approcher par un polynôme de degré $n = 2$ (ou $n > 2$)) sur l'intervalle $[-1, 1]$. Nous allons voir que nous pourrons construire trois polynômes à ce sujet:

- Le polynôme de Taylor $p_T(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. L'erreur maximale de cette approximation est 0.21828.

- Le polynôme de Lagrange passant par $(-1, e^{-1})$, $(0, 1)$ et $(1, e)$ est le polynôme de dgré 2 donné par: $p_L(x) = 0.54308x^2 + 1.1752x + 1$. L'erreur maximale de cette approximation est 0.174378.

- Le polynôme de Newton passant par $(-1, e^{-1})$, $(0, 1)$ et $(1, e)$ est:

$$p_N(x) = 0.367879 + 0.632121(x + 1) + 0.543081(x + 1)(x - 0).$$

  L'erreur maximale de cette approximation est 0.174378.

Dans tous les calculs portant sur f (tels la dérivée de f ou l'intégrale de f) on pourra remplacer f par P_T ou P_L (ou par un autre polynôme). En fait il y a plusieurs méthodes pour construire un tel polynôme. Dans un premier temps nous allons nous focaliser sur l'approximation de Taylor, Lagrange, Newton et celle de Chebyshev.

4.1.2 Un exemple constructif

Un résultat classique en analyse est le développement en série entière des fonctions usuelles telles que sin, cos, ...

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1]$$

Notre but est de savoir, jusqu'a quel ordre n (fini) nous devons écrire le développement pour avoir une bonne approximation de la somme infinie.

Pour illustration, soit à calculer $e = exp(1)$ à partir de l'écriture de $(e^x)_{x=1}$ en série entière. On a donc

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$$

Si nous tronçons la série (infinie) précédente à un certain ordre $n > 1$, nous obtenons une approximation de la valeur de e par:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

n	S_n
0	1
1	2.0
2	2.5
3	2.666666666666
4	2.708333333333
5	2.716666666666
6	2.718055555555
7	2.718253968254
8	2.718278769841
9	2.718281525573
10	2.718281801146
11	2.718281826199
12	2.718281828286
13	2.718281828447
14	2.718281828458
15	2.718281828459

La valeur numérique de e, à une précision de 10^{-29}, est donnée par $e \approx 2.71828182845904523536028747135$. On remarque donc, à partir du tableau ci dessus, que plus l'ordre n du développement est élevé plus l'approximation de e par la série de Taylor est meilleure. S_{15} donne une approximation de e avec une précision de 10^{-13}.

4.2 Approximation polynômiale de Taylor

Théorème:

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$ (un point fixe). Si $x \in [a,b]$, alors il existe un élément c entre x_0 et x tel que

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

où:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ E_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

P_n est le polynôme qui peut être utilisé comme approximation de f, $E_n(x)$ est l'erreur commise lors de cette approximation.

Preuve:

On pose:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

P_n est un polynôme de degré n et est indéfiniment dérivable. Considérons la fonction g définie par: $g(t) = f(t) - P_n(t) + \lambda(t - x_0)^{n+1}$, λ est une constante telle que $g(x) = 0$. On a donc:

$$g(t) = f(t) - P_n(t) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x - x_0)^{(n+1)}}(t - x_0)^{(n+1)}.$$

On vérifie facilement que:

$$P_n(x_0) = f(x_0)\ ,\ P_n'(x_0) = f'(x_0)\ ,\ P_n''(x_0) = f''(x_0)\ ,\ \ldots\ ,\ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

$P_n^{(n+1)}$ est identiquement nulle, donc g est n-fois dérivable sur $[a,b]$ et $g^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$. De plus on a:

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0$$

Alors on a $g(x_0) = g(x) = 0$ d'après le théorème de Rolle il existe c_1 entre x_0 et x tel que $g'(c_1) = 0$. On a alors $g'(x_0) = g'(c_1) = 0$, donc il existe un élément c_2 entre x_0 et c_1 tel que $g''(c_2) = 0$. Par récurrence on construit donc une suite d'éléments $(c_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ de $]a,b[$ tels que:

$$a < c_n < c_{n-1} < \ldots < c_2 < c_1 < b \quad ,\ g^{(i)}(c_i) = 0\ ,\ si\ i = 1, 2, \ldots, n$$

On a alors $g^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(c_n) = 0$ et d'après le théorème de Rolle il existe c entre x_0 et c_n tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$. Or

$$g^{(n+1)}(c) = 0 = f^{(n+1)}(c) + \frac{P_n(x) - f(x)}{(x - x_0)^{(n+1)}}(n+1)!$$

donc: $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$. Ce qui démontre le théorème.

4.2.1 Exemple d'estimation de l'erreur

Nous allons montré dans cet exemple pourquoi nous avons eu besoin de prendre $n = 15$ pour obtenir une approximation de e par S_{15} avec une précision de 10^{-13} (voir tableau précédent).
$f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$, le développement de Taylor au point $x_0 = 0$ à l'ordre 15 de f est donné par $f(x) = P_{15}(x) + E_{15}(x)$.

$$P_{15}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{15}}{15!}$$

$P_{15}(1) = S_{15}$. L'erreur est donnée par:

$$E_{15}(x) = \frac{f^{(16)}(c)x^{16}}{16!} \quad , \ c \in]0, 1[$$

A partir de $f^{(16)}(c) = e^c$ et de $1 < e^c < e < 3$, on obtient une majoration de l'erreur (pour x=1):

$$E_{15}(1) = \frac{f^{(16)}(c)}{16!} = \frac{e^c}{16!} < \frac{3}{16!} = 1.43384310^{-13}$$

4.2.2 A propos de l'erreur

Il est évident que:

i la précision du polynôme de Taylor est d'autant meilleure que n est grand

ii la précision de chaque polynôme de Taylor décroit lorsque x est loin de x_0.

Un compromis entre (**i**) et (**ii**) et de choisir:

- n assez grand
- restreindre le domaine de validiter de l'approximation de f par P_n a un voisinage de x_0

Si on choisit x dans un intervalle de centre x_0 et de rayon R (c.à.d $|x_x_0| \leq R$), on obtient la majoration de l'erreur suivante:

$$|\text{Erreur}| = |E_n(x)| \leq \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \tag{4.2}$$

où

$$M \leq \max\{|f^{(n+1)}(x)| \ : \ x_0 - R \leq x \leq x_0 + R\}$$

On remarque alors que:

- Si n est fixé, et $|f^{(n+1)}(t)|$ est bornée sur $[x_0 - R, x_0 + R]$, le majorant de l'erreur (4.2) est donc proportionnelle à $R^{n+1}/(n+1)!$ et décroit lorsque $R \to 0$.
- Si R est fixé, le majorant de l'erreur (4.2) est inversement proportionnel à $(n+1)!$ et tend vers zéro lorsque n devient suffisament grand. Ceci est schématisé dans la figure suivante:

Sur cette figure on remarque que l'on approche bien e^x par $P_4(x)$ sur $[-2, 2]$.

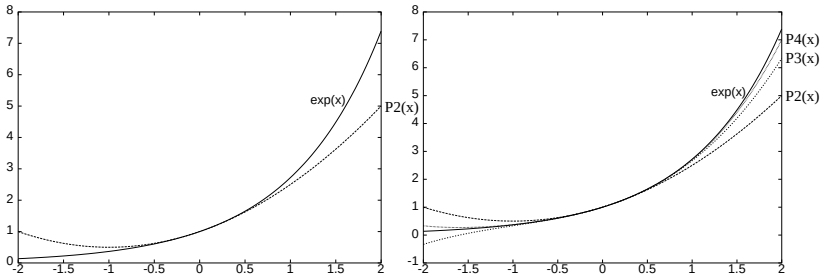

Figure 4.1: Approximation polynômiale de Taylor.

4.3 Interpolation polynômiale de Lagrange

Connaissant $(n+1)$ points du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $A_0(x_0, f_0)$, $A_1(x_1, f_1)$, $A_2(x_2, f_2)$, $\ldots$, $A_n(x_n, f_n)$ tels que les x_i sont tous distincts. On cherche un polynôme P, de degré au plus n, passant par ces $(n+1)$ points c'est à dire:

$$P(x_0) = f_0, P(x_1) = f_1, \ldots, P(x_n) = f_n$$

- Les f_i sont souvent les valeurs d'une fonction f au points x_i: $f_i = f(x_i)$ on dit alors que le polynôme P coincide avec la fonction f au point $(x_i)_{i=0,1,\ldots n}$. Le polynôme P approche la fonction f, dans tous les calculs portant sur f on pourra la remplacer par P.
- l'approximation de f par P est d'autant meilleure qu'au points (x_i) nous aurons plus d'information sur f ainsi que sur f'.

4.3.1 Existance et unicité du polynôme de Lagrange

Théorème Il existe un polynôme et un seul de degré au plus n tel que:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Preuve: En fait, il y a deux façons pour démontrer ce résultat: une directe et l'autre moyennat les polynômes de Lagrange.

méthode directe: Soit P un polynôme de degré n (au plus):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Par hypothèse on a: $P(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$, ce qui représente un système de $n+1$ équations linéaires et $n+1$ variables (les coefficients a_0 a_1, $\ldots$, a_n de P), c'est un système de Kramer. La solubilité de ce système d'équation s'établit par l'étude de son déterminant:

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

il s'agit du déterminant de Vandermonde qui vaut:

$$\Pi_{i=0,j>i}^{n-1}(x_i - x_j)$$

et qui est effectivement non nul du fait que les x_i sont distincts deux à deux, d'ou l'existance et l'unicité des a_i.

Formulation de Lagrange:
Unicité:
Si P_1 et P_2 sont deux polynômes de degré au plus n tels que:

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Le polynôme $D = P_1 - P_2$ vérifie $D(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = 0$ pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. On conclut que D de degré au plus égale à n s'annule $n+1$ fois, D est donc le polynôme nulle donc $P_1 = P_2$.

Existance:
Nous allons construire le polynôme de Lagrange qui satisfait aux conditions:

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

questions préliminaires:
• Q_1. Trouver le polynôme L_k de degré au plus n tel que

$$L_k(x_i) = 0 \qquad \forall\, i \neq k \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \qquad L_k(x_k) = 1$$

L_k s'annule n fois donc peut s'écrire comme:

$$L_k(X) = C(X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})\ldots(X - x_n)$$

ou C est une constante que l'on peut déterminer à partir de la contrainte $L_k(x_k) = 1$. On trouve:

$$C^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)$$

finalement L_k s'écrit comme:

$$L_k(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})\ldots(X - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

• Q_2 Les $n+1$ polynômes $(L_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ sont linéairement independants.
En effet soit α_0, α_1, $\ldots \alpha_n$ n+1 réels tels que:

$$\alpha_0 L_0(X) + \alpha_1 L_1(X) + \ldots + \alpha_n L_n(X) = 0$$

La relation précédente devrait être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en particulier pour $x = (x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$.
pour $X = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ on a $\alpha_i L_i(x_i) = 0$ donc $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. La famille $(L_k)_{k=0,1,\ldots,n}$ est une famille de $n+1$ él'ements linéairement indépendantes, c'est donc une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré n.
Compte tenu de Q_1 et Q_2, P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_k:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \beta_k L_k(X)$$

comme $P(x_i) = f_i$ $i = 0, 1, \ldots, n$, on trouve donc que $\beta_i = f_i$.

Conclusion:

$$P(X) = f_0 L_0(X) + f_1 L_1(X) + \ldots + f_n L_n(X)$$

Les L_k sont appelés les polynômes de Lagrange élémentaires et P c'est le polynôme de Lagrange.

4.3.2 Exemple

Nous allons construire le polynôme de Lagrange passant par les 4 points:

$$A_0(2,1)\ ,\ A_1(3,2)\ ,\ A_2(-1,3)\ ,\ A_3(4,4)$$

on pose: $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 4$. $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, $f_2 = 3$ et $f_3 = 4$.

Polynômes de Lagrange élémentaires:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(X-3)(X-(-1))(X-4)}{(2-3)(2-(-1))(2-4)} = \frac{1}{6}(X-3)(X-(-1))(X-4)\\
L_1(x) &= \frac{(X-2)(X-(-1))(X-4)}{(3-2)(3-(-1))(3-4)} = \frac{-1}{3}(X-2)(X-(-1))(X-4)\\
L_2(x) &= \frac{(X-2)(X-3)(X-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)} = \frac{-1}{60}(X-2)(X-3)(X-4)\\
L_3(x) &= \frac{(X-2)(X-3)(X-(-1))}{(4-2)(4-3)(4-(-1))} = \frac{1}{10}(X-2)(X-3)(X-(-1))
\end{aligned}$$

Le polynôme de Lagrange est don donné par:

$$\begin{aligned}
P(X) &= 1L_0(X) + 2L_1(X) + 3L_2(X) + 4L_3(X)\\
&= \frac{1}{60}X^3 + \frac{7}{20}X^2 - \frac{16}{15}X + \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

4.3.3 Autre écriture du Polynôme de Lagrange

1. Soit $V(X) = (X-x_0)(X-x_1)\dots(X-x_n) = \Pi_{i=0}^{i=n}(X-x_i)$, on montre facilement que:

$$\begin{aligned}
V'(x_k) &= (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)\\
&= (\Pi_{i=0}^{i=n}(x_k-x_i))_{i\neq k} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Les polynômes de Lagrange élémentaires peuvent s'écrire comme:

$$L_k(X) = \frac{V(X)}{V'(X)(X-x_k)}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f_k V(X)}{V'(X)(X-x_k)}\\
&= V(X)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{f_k}{V'(X)(X-x_k)} \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

2. Variavles réduites

Supposons que les x_i sont équidistants:

$$x_i = x_0 + ih \qquad , \qquad i = 0,1,\dots,n \quad , \quad h = x_{i+1} - x_i$$

On introduit la variable réduite s de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&X = x_0 + sh\\
&\text{si } X = x_0 \quad s = 0\\
&\text{si } X = x_n \quad s = n \ \text{ car } \ x_n - x_0 = nh
\end{aligned}$$

comme $(X - x_i) = x_0 + sh - x_0 - ih = h(s - i)$ et $(x_k - x_i) = x_0 + kh - x_0 - ih = h(k - i)$, L_k prend la forme suivante:

$$L_k(X) = L_k(x_0 + sh) = \Pi_{i=0}^{i=n} \frac{(s-i)}{(k-i)_{i \neq k}}$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange devient donc:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(\Pi_{i=0}^{i=n} \frac{(s-i)}{(k-i)_{i \neq k}})$$

4.3.4 Estimation de l'erreur

Thórème: Soit f une fonction de classe $C^{n+1}[a,b]$. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, P le polynôme d'interpolation de Lagrange au points: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$ alors:

$$\begin{aligned} &\forall x \in [a,b] \\ &f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) \\ &\text{où } a < \min(x, x_0) < \theta < \max(x, x_n) < b \end{aligned} \tag{4.5}$$

Preuve: Si $x = x_i$, $f(x) - P(x) = 0$ donc l'équation 4.5 est vérifiée.
Si $x \neq x_i$ soit ψ la fonction auxiliaire definie par:

$$\begin{aligned} &\psi(t) = f(t) - P(t) - (t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_n)\phi(x) \quad x\text{est un paramètre} \\ &\phi(x) = \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} \end{aligned}$$

on remarque que: $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \ldots = \psi(x_n) = \psi(x) =$, donc ψ est un polynôme ayant $n+2$ racines.

Résultats préliminaires
Si g $[a,b] \to \mathbb{R}$ telle que g' existe:
Si g possède $(n+2)$ zéros distincts alors g' possède au moins $(n+1)$ zéros distincts.
généralisation du théorème de Rolle: Si $g \in C^{(n+1)}([a,b])$ et si g posséde au moins $(n+2)$ zéros alors $g^{(n+1)}$ a au moins un zéro.

D'après le théorème de Rolle généralisé, la fonction $\psi^{(n+1)}$ admet au moins un zéro. Soit $\theta \in]a,b[$ tel que: $\psi^{(n+1)}(\theta) = 0$, On conclut donc que l'erreur est donnée par:

$$E_N(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$

De plus si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, elle atteint sa borne supérieure, on a la majoration de l'erreur suivante:

$$E_N(x) = |f(x) - P(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!} (\max_{x \in [a,b]} f^{(n+1)}(x))$$

Exemple: Construire sur $[-5,5]$, les polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en prenant des abscisses d'interpolation équidistantes.

On constate que l'on approche bien la courbe $\frac{1}{1+x^2}$ au centre de l'intervalle. Par contre, aux extrêmites se produisent des oscillations parasites appelées **effet de bord**. Nous allons voir dans la section 6 que ses effets de bord disparaissent si l'on choisit comme points d'interpolation les points de Chebyshev.

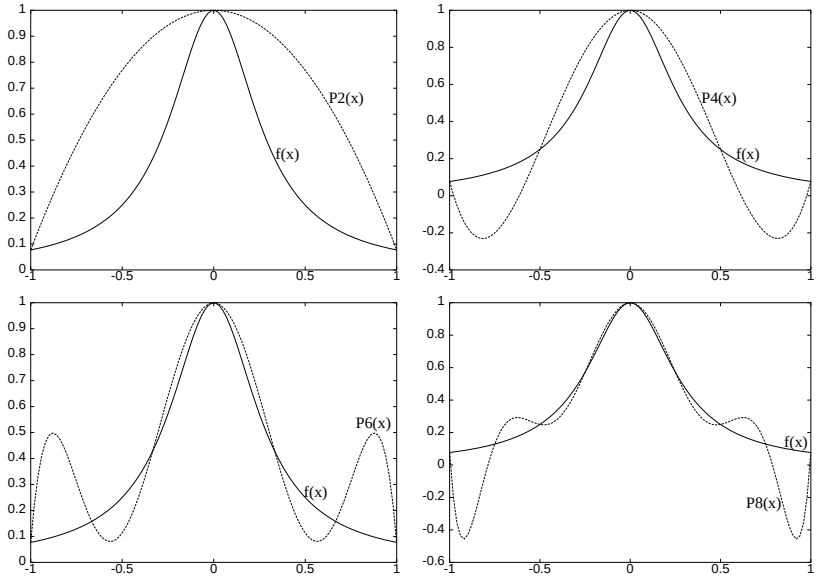

Figure 4.2: Interpolation Polynômiale de Lagrange.

4.4 Interpolation polynômiale de Newton

4.4.1 Polynôme de Newton

L'inconvenient des polynômes de Lagrange c'est qu'il n'y a pas de relation de récurrence entre eux. En d'autres termes, chaque polynône doit être construit individuellement et il n'y a pas moyen de calculer le polynôme de degré n à partir de celui de degré $n-1$: les deux polynômes sont complètement independants. La méthode de Newton nous permettra de déduire P_n à partir de P_{n-1}. Cette méthode est introduite récursivement de la façon suivante:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{4.6}$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
P_N(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\quad + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots + \\
&\quad a_N(x - x_0)\ldots(x - x_{N-1})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

On remarque que P_N est obtenu à partir de P_{N-1} en utilisant la relation:

$$P_N(x) = P_{N-1}(x) + a_N(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{N-1})$$

Le polynôme P_N (4.8), de degré $\leq N$, est appelé polynôme de Newton au points x_0, x_1, $\ldots x_{N-1}$.

4.4.2 Exemple

Etant donné les points $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 4.5$ et les coefficients $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = -0.1$ et $a_4 = 0.003$. Trouver $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$ et calculer $P_i(2.5)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
En utilisant les formules précédentes on a:

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = 5 - 2(x-1) \quad , \quad P_2(x) = 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) \\
&P_3(x) = 5 - 2(x-1) + 0.5(x-1)(x-3) - 0.1(x-1)(x-3)(x-4) \\
&P_4(x) = P_3(x) + 0.003(x-1)(x-3)(x-4)(x-4.5)
\end{aligned}$$

On trouve: $P_1(2.5) = 2$,
$P_2(2.5) = P_1(2.5) + 0.5(1.5)(-0.5) = 1.625$,
$P_3(2.5) = P_2(2.5) - 0.1(1.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5125$
et $P_4(2.5) = P_3(2.5) + 0.003(1.5)(-0.5)(-1.5)(-2) = 1.50575$

4.4.3 Interpolation polynômiale de Newton

Nous allons déterminer les coefficients a_k pour tout les polynômes P_1, P_2,..., P_N qui approchent une fonction f donnée. La détermination des constantes a_k se fait à partir du fait que les polynômes de Newton P_j coï ncident avec la fonction f au points x_0, x_1, ..., x_j: $f(x_i) = P_j(x_i) \;\; i = 0, 1, \ldots, j$

Pour le polynôme P_1, a_0 et a_1 sont déterminés à partir de

$$P_1(x_0) = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad P_1(x_1) = f(x_1)$$

On trouve:

$$a_0 = f(x_0) \tag{4.9}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.10}$$

Les coefficients a_0 et a_1 de P_2 sont les mêmes que ceux qui figurent dans P_1 et qu'on vient de calculer (4.9,4.10). Le coeficient a_2 de P_2 est déterminé de la façon suivante:

$$P_2(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

a_2 est donc donné par:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\
&= \frac{1}{(x_2 - x_0)}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Cela nous amène a introduire le concept des différences divisées:
Définition: Les différences divisées d'une fonction f sont définies comme suit:

$$\begin{aligned}
&f[x_k] = f(x_k) \\
&f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \\
&f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}} \\
&f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}} \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{4.12}$$

La formule de récurrence est donc définie par:

$$f[x_{k-i}, x_{k-i+1}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-i+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-i}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-i}} \tag{4.13}$$

Théorème: Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$. Si x_0, x_1, ..., x_N sont $N+1$ points distincts de $[a,b]$, alors il existe un unique polynôme P_N, *dit polynôme de Newtom*, de degré au plus égal à N tel que:

$$\begin{aligned}
&P_N(x_i) = f(x_i) \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, \ldots, N \\
&P_N(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \ldots a_N(X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_{N-1}) \\
&\text{où} \qquad a_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

de plus, pour tout $x \in [a,b]$ il existe $\theta \in [a,b]$ tel que:

$$\begin{aligned}
&f(x) = P_N(x) + E_N(x) \\
&E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\theta)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

E_N est l'erreur de l'approximation de Newton.

Exemple de construction du Polynôme de Newton

Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$, construisons les différences divisées basées sur les points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ et $x_5 = 6$:

x_i	$f[x_i]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
$x_0 = 1$	-2	-	-	-	-	-
$x_1 = 2$	1	3	-	-	-	-
$x_2 = 3$	32	31	14	-	-	-
$x_3 = 4$	139	107	38	8	-	-
$x_4 = 5$	394	255	74	12	1	-
$x_5 = 6$	893	499	122	16	1	0

Le polynôme de Newton s'écrit donc comme suit:

$$P_4(x) = -2 + (x-1)[3 + (x-2)[14 + (x-3)[8 + (x-4)]]]$$

4.5 Polynôme de Chebyshev

4.5.1 Polynôme de Chebyshev

La formule (4.14) montre que l'erreur de l'approximation polynômiale de Newton est un produit de la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de f, évaluée à un point inconnu, avec l'expression $(x - x_0)\ldots(x - x_N)$ qui ne dépend que de la subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$. Il est alors intéressant de chercher, pour un n donné, la subdivision de $[a,b]$ pour laquelle:

$$\max_{x \in [a,b]} |(x - x_0)\ldots(x - x_N)| \qquad \text{soit minimal} \tag{4.15}$$

Le polynôme de Chebyshev apporte un élément de réponse à cette question.

Définition

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, les polynômes de Chebyshev sont définis par:

$$T_n(x) = \cos(n \mathrm{Arccos} x).$$

Il est facile de se convaincre que: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

Propriétés des Polynômes de Chebyshev

i) Les fonctions $T_n(x)$ satisfont la relation de récurrence suivante:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{4.16}$$

Par conséquent, $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1}, c'est à dire, $T_n(x) = 2^{n-1}x^n \ldots$

ii) $|T_n(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1, 1]$, $T_{2m}(-x) = T_{2m}(x)$ et $T_{2m+1}(-x) = -T_{2m+1}(x)$

iii) $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = (-1)^k$, pour $k = 0, 1, \ldots, n$

iv) $T_n(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})) = 0$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$

v) Les polynômes $T_n(x)$ sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x) = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \tag{4.17}$$

Preuve
i) l'équation (4.16) est une conséquence immédiate de la relation:

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

ii), **iii)** et **iv)** sont faciles à établir
v) Pour montrer l'orthogonalité, on pose $\cos(\theta) = x$ et donc $\theta = \text{Arccos}x$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_m(x) &= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)]d\theta \\ &= \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \end{aligned} \tag{4.18}$$

A l'aide de la relation (4.16) on montre facilement qu'on a le Tableau suivant:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2^{3-1}x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2^{4-1}x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 2^{5-1}x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 2^{6-1}x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7(x) &= 2^{7-1}x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{aligned}$$

Remarque:

D'après la propriété i), T_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré x^n a pour coefficient 2^{n-1}. On appelle polynôme de Chebyshev normalisé à l'unité de $T_n(x)$ le polynôme $\tilde{T}_n(x)$ défini par $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ et on a:

$$\max_{x\in[-1,1]} \tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Théorème:

Si E_n désigne l'ensemble des polynômes de degré n et dont le coefficient de x^n est 1, alors pour tout polynôme p de E_n on a:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} \tilde{T}_n(x) \leq \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \tag{4.19}$$

Preuve:

Supposons qu'il existe un polynôme p de E_n tel que: $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ et considérons le polynôme $d(x)$ défini par: $d(x) = \tilde{T}_n(x) - p(x)$. d est un polynôme de degré $\leq n-1$ (le coefficient de x^n est le même pour $\tilde{T}_n(x)$ et $p(x)$).
La fonction polynômiale $d(x)$ s'annulle au moins une fois dans chacun des intervalles fermés:

$$[x_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), x_{k+1} = \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})] \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

En effet: d'après iii) on a: $d(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x_k)$ et $d(x_{k+1}) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}} - p(x_{k+1})$, il est facile de se convaincre que $d(x_k)d(x_{k+1}) < 0$. Alors, $d(x)$ possède n zéros dans $[-1,1]$ et $\deg d \leq n-1$, par conséquent $d(x)$ est identiquement nul donc:

$$\begin{aligned} &d(x) = 0 \qquad , \qquad \tilde{T}_n(x) = p(x) \\ &\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse: $\max_{x\in[-1,1]} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Le théorème précédent montre bien que:

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| \qquad \text{est minimal}$$

si et seulement si $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \tilde{T}_n(x)$, c.à.d, si

$$x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}) \qquad , \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

les x_k sont appelés les points de Chebyshev. Pour répondre à la question (4.15), il faut utiliser la translation $x \to \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$ qui envoie l'intervalle $[-1,1]$ sur $[a,b]$. On a donc le théorème suivant:

Théorème:

L'expression (4.15) est minimale parmi toutes les subdivisions $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si:

$$\begin{aligned} &x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n. \\ &\max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \\ &|f(x) - P_C(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)| \end{aligned} \tag{4.21}$$

P_C est le polynôme d'interpolation de Lagrange basée sur les points de Chebyshev.

Exemple: Contruire sur $[-1,1]$ les polynômes d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) =$

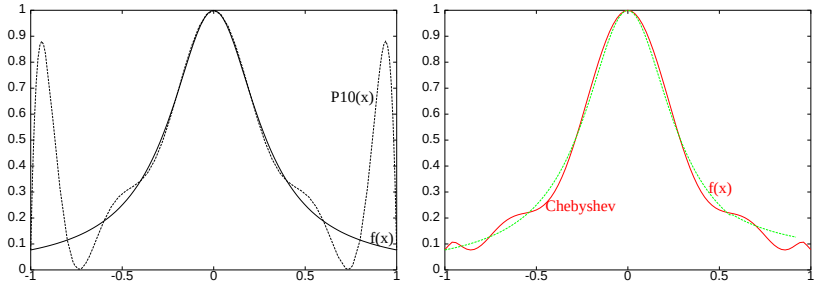

Figure 4.3: Polynôme de Chebyshev.

$\frac{1}{1+12x^2}$ d'une part en prenant des abscisses d'interpolation équidistantes, d'autre part en choisissant les points de Chebyshev.

Cet exemple est dû a Runge (appelé phénomène de Runge) met bien en évidence les effets de bord. Par contre, si on utilise les points de Chebyshev, on constate que les effets de bord disparaissent.

4.6 Exercices

Exercice 1. Si $f(x) = e^x$, montrer que $n = 9$ est le plus petit entier telle que l'erreur $|E_9(x)| = |f(x) - P_9(x)| < 0.0000005$ pour $x \in [-1, 1]$

Exercice 2.
a. En utilisant la série géométrique $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots \qquad |t| < 1$
après integration montrer que : $\mathrm{ArcTan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
b. Montrer que: $\pi = 2\sqrt{3}(1 - \frac{3^{-1}}{3} + \frac{3^{-2}}{5} - \frac{3^{-3}}{7} + \frac{3^{-4}}{9} - \ldots)$
c. Utiliser b. pour calculer la valeur approchée de π à 10^{-8}.

Exercice 3. Soit $f(x) = \ln(1 + x)$.
a. Montrer que $f^{(k)} = (-1)^{(k-1)}(k - 1)!/(1 + x)^k$
b. Ecrire le développement de Taylor de f à l'ordre n.
c. Calculer $P_3(0.5)$, $P_6(0.5)$ et $P_9(0.5)$. Comparer à $f(0.5)$
d. Montrer que pour $x \in [0, 0.5]$, la majoration de l'erreur est donnée par: $E_9(x) < 0.00009765$

Exercice 4.
1. Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange P de la fonction $f(x) = \ln\frac{x}{4}$ pour les 4 abscisses d'interpolation suivantes: 1, 2, 3, 4.
2. Calculer $P(\pi)$. Comparer cette valeur à la valeur exacte $\ln\frac{\pi}{4}$. Donner une majoration de l'erreur.
3. Calculer $P'(4)$ et comparer cette valeur à $f'(4)$.

Exercice 5. Soit $g \in C^{N+1}[a, b]$, supposons qu'il existe deux points $x, x_0 \in [a, b]$ tels que:

$$g(x) = g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \ldots = g^{(N)}(x_0) = 0$$

a. Montrer qu'il existe un point c entre x et x_0 tel que: $g^{(N+1)}(c) = 0$
b. Soient $f \in C^{(N+1)}[a, b]$, P_N le développement de Taylor au voisinage de x_0 à l'ordre N de f et R_N le reste du développement tels que:

$$f(x) = P_N(x) + R_N(x, x_0, N, \theta), \quad \theta \text{ est compris entre } x \text{ et } x_0.$$

Ecrire le polynôme P_N.
c. Démontrer que

$$R_N(x, x_0, N, \theta) = f^{(N+1)}(\theta)\frac{(x - x_0)^{N+1}}{(N + 1)!}$$

Exercice 6.
L'objet de l'exercice est le calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$
1. f désigne une fonction de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $k = 0, 1, \ldots, n$: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
Soit P le polynôme de degré au plus égal à 1 tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$.
a. Donner la valeur de l'intégrale de P sur $[a, b]$. On note I cette valeur.
b. Par application du théorème de Rolle à une fonction auxiliaire convenablement choisie, prouver que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(x) - P(x) = -\frac{f"(c)}{2}(x - a)(x - b)$$

et en déduire que si M_2 est un majorant de $|f"|$ sur $[a, b]$ alors:

$$|\int_a^b f(x)dx - I| \leq \frac{M_2}{12}(b - a)^3$$

2. Par application de cette méthode sur chaque segment $[x_{k-1}, x_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ établir la majoration suivante:

$$|\int_a^b f(x)dx - I_n| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3$$

$$\text{avec} \qquad I_n = \frac{b-a}{n}(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2})$$

Exercice 7. Soient $(a_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ une subdivision régulière de $[a,b]$ de pas h et $f \in C^{n+1}[a,b]$. Considérons les points $A_i(a_i, f(a_i))_{i=0,1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^2$, on désire construire un polynôme $P_n(X)$ de degré au plus égal à n passant par les points $A_i(a_i, f(a_i))_{i=0,1,\ldots,n}$.
a. Démontrer que les polynômes $(l_j(X))_{j=0,1,\ldots,n}$ de degré n tels que: $l_j(a_i) = \delta_{ij} \quad i = 0, 1, \ldots, n$ sont de la forme:

$$l_j(X) = \frac{\Pi_{i=0}^n (X - a_i)}{\Pi_{i=0}^n (a_j - a_i)}|_{i \neq j} \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

b. En utilisant le changement $X - a_0 = th$ montrer que:

$$l_j(t) = \frac{\Pi_{i=0}^n (t - i)}{\Pi_{i=0}^n (j - i)}|_{i \neq j} \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

Si $x \in [a,b]$ quel est le domaine de variation de t?
c. Montrer que la famille $(l_0(X), l_1(X), \ldots, l_n(X))$ est une base de l'ensemble des polynômes de degrés $\leq n$.
d. Démontrer que le polynôme de Lagrange P_n est de la forme:

$$P_n(X) = \Sigma_{i=0}^n f(a_i) l_i(X)$$

e. En appliquant le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire convenablement choisit montrer que:

$$P_n(X) - f(X) \quad = \quad \frac{(X - a_0)(X - a_1)\ldots(X - a_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) = E_n(X) \ , \quad \theta \in]a, b[$$

et en déduire que

$$E_n(X) = h^{n+1} \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$

f. Montrer que si M_{n+1} est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a,b]$ alors:

$$|P_n(X) - f(X)| = |E_n(X)| \leq h^{n+1} \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Application: Montrer que:

$$|E_1(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{8} \qquad x \in [a_0, a_1]$$

$$|E_2(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}} \qquad x \in [a_0, a_2]$$

$$|E_3(x)| \leq \frac{h^4 M_4}{24} \qquad x \in [a_0, a_3]$$

Exercice 8. Soient $l_k(x)_{(k=0,1,2)}$ les polynômes de Lagrange élementaires au points x_0, x_1 et x_2. On définit g par $g(x) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) - 1$
a. Montrer que g est un polynôme de degré ≤ 2.

b. Montrer que $g(x_k) = 0$ pour $k = 0, 1, 2$
c. Montrer que $g(x) = 0$ pour tout x.
d. genéraliser le résultat au cas de n racines x_0, $x_1 \ldots x_2$.

Exercice 9. Soient $l_k(x)_{(k=0,1,\ldots,n)}$ les polynômes de Lagrange élementaires au points x_0, x_1, ..., x_n. On définit g par $g(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i L_i(x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

Exercice 10: **a.** Soit $f \in C^3[a, b]$, x_0, x_1, x_2 trois points de $[a, b]$.
Soit $P_1(X) = a_0 + a_1(X - x_0)$ le polynôme d'interpolation de Newton du premier degré passant par $A_0(x_0, f(x_0))$ et $A_1(x_1, f(x_1))$. Calculer a_0 et a_1 en fonction de x_0, x_1 et $f(x_0)$, $f(x_1)$.
b. Soit $P_2(X) = P_1(X) + a_2(X - x_0)(X - x_1)$ le polynôme d'interpolation de Newton du second ordre passant par $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$ et $A_2(x_2, f(x_2))$. Montrer que:

$$a_0 = f(x_0) \quad , \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)}[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}]$$

c. En utilisant une fonction auxiliaire convenablement choisie, montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a:

$$f(x) = P_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f^{(3)}(c)}{6} = P_2(x) + E_2(x) \quad c \in]a, b[$$

d. Supposant que x_0, x_1 et x_2 sont equidistants, Exprimer $E_2(x)$ en terme de *la variable réduite s* ($x = x_0 + sh$) et $h = x_1 - x_0$.
e. Soit M_3 un majorant de $f^{(3)}$ sur $]a, b[$, montrer que

$$|E_2(x)| \leq \frac{h^3 M_3}{9\sqrt{3}}$$

Exercice 11: On rappelle la méthode de Lagrange, qui à partir des 2 valeurs initiales x_0 et x_1, permet de générer une itération afin de résoudre l'équation $f(x) = 0$, soit:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

a. Interpréter géométriquement cette méthode en montrant que x_{n+1} est l'abcisse du point d'intersection de la droite sécante passant par les points $(x_{n-1}, f(x_{n-1})) \in C_f$ et $(x_n, f(x_n)) \in C_f$ avec l'axe des x. Faire une figure illustrant ce résultat dans un cas partculier. (C_f est la graphe de f)
b. On peut également interpréter ce résultat en terme *d'interpolation inverse*. Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange Q basé sur les points $(f(x_{n-1}), x_{n-1}) \in C_{f^{-1}}$ et $(f(x_n), x_n) \in C_{f^{-1}}$. Calculer $Q(0)$. Que retrouve–t–on? ($C_{f^{-1}}$ est le graphe de f^{-1}).
c. Proposer une amélioration de la méthode précédente utilisant 3 valeurs successives de l'itération et donc un polynôme de degré 2. Calculer la valeur obtenue alors pour x_{n+1} en fonction de x_n, x_{n-1} , x_{n-2} et $f(x_n)$, $f(x_{n-1})$, $f(x_{n-2})$.

Exercice 12. (*Interpolation d'Hermite*) Soit f une fonction numérique définie sur $[a, bb]$ et f' sa dérivée. $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[a, b]$. Soient $(f_i = f(x_i))$ une suite de valeurs de f aux points $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ et $(y_i = f'(x_i))$ une suite de valeurs de f' aux points $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$. On rappelle que le polynôme de Lagrange d'indice k est donné par:

$$L_k(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})\ldots(X - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}$$

1.) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f(x) = e^{-x^2}$ aux points 0, 1, 2.
2.) On suppose qu'il existe un polynôme P de degré au plus $2n+1$ tel que:

$$P(x_i) = f_i \qquad \text{et} \qquad P'(x_i) = f'_i \qquad \text{pour} \qquad i = 0, \ldots, n \tag{4.22}$$

Montrer l'unicité d'un tel polynôme.
3.) Pour $k = 0, \ldots, n$, on considère les polynômes:

$$\psi_k(X) = (X - x_k)L_k^2(X)$$
$$\phi_k(X) = [1 - 2(X - x_k)\frac{dL_k(X)}{dX}(x_k)]L_k^2(x)$$

et

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \{f_k\phi_k(X) + y_k\psi_k(X)\}$$

3a.) Calculer $\psi_k(x_i)$, $\psi'_k(x_i)$, $\phi_k(x_i)$, $\phi'_k(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$ et en déduire que pour $0 \leq i \leq n$

$$P(x_i) = f_i \qquad \text{et} \qquad P'(x_i) = f'_i$$

3b.) Quel est le degré de ψ_k, ϕ_k et P. Le polynôme ainsi construit est appelé le polynôme d'interpolation d'Hermite de f aux points (x_i).
4.) On supose que $f \in C^{2n+2}[a, b]$, montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que:

$$f(X) - P(X) = \frac{(X - x_0)^2(X - x_1)^2 \ldots (X - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

5.) Application: Calculer le polynôme d'interpolation d'Hermite de $f(x) = e^{-x^2}$ aux points 0, 1, 2.

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Corrigés
Mathématiques
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..